Zajęcia dokształcające z matematyki

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego "Poczuj chemię do chemii"

J.Stanek

Wydział Chemii UAM Poznań

Listopad 2009

Pojęcie zbioru

- Pojęcie zbioru należy do podstawowych pojęć matemetycznych i jest pojęciem pierwotnym, którego nie definiujemy.
- Przykłady zbiorów: zbiór studentów, owoców, znaczków, kart płatniczych, itd.
- Podzbiory i relacje między nimi
  - Dwa zbiory A i B są równe, gdy każdy element zbioru A jest elementem zbioru B i na odwrót.
  - Zbiór $A \subset B$, gdy każdy element zbioru A jest elementem zbioru B.
  - Zbiór bez żadnych elementów nazywamy zbiorem pustym.
- Zbiory ze względu na liczbę elementów dzielimy na
  - zbiory skończone (zbiór dzielników liczby 12).
  - zbiory nieskończone (zbiór wielokrotności liczby 12).

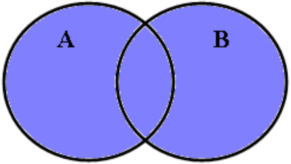
Oznaczenia zbiorów i ich elementów

- Zbiór cyfr: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $3 \in A$, $77 \notin A$
- Zbiór liczb naturalnych: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- Zbiór liczb całkowitych: $\mathbb{Z} = \{\ldots - 2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
- Zbiór liczb rzeczywistych większych od 3: $X = \{x : x \in \mathbb{R} \ i \ x > 3\}$
- Zbiór pusty: $B = \varnothing$

Działania na zbiorach

Suma zbiorów

Sumą zbiorów A i B nazywamy zbiór tych elementów, które należą do zbioru A lub do zbioru B. Matematycznie zapisujemy to tak:
$A \cup B = \{x : x \in A \ \vee \ x \in B\}$.

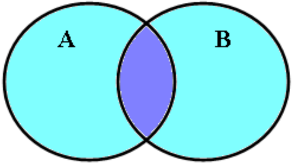


Przykład
Jeżeli $A = \{1, 2, 5\}$ i $B = \{1, 3, 4\}$ wówczas $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
Pomimo tego, że 1 występuje w obydwu zbiorach, w sumie tych zbiorów występuje tylko jeden raz.

Działania na zbiorach

Iloczyn zbiorów

Iloczynem (częścią wspólną) zbioru A i B nazywamy zbiór tych elementów, które należą jednocześnie do zbioru A i do zbioru B. Formalnie zapisujemy to w następujący sposób $A \cap B = \{x : x \in A \ \wedge \ x \in B\}$.

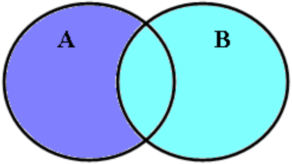


Przykład
Jeśli $A = \{1, 2, 5\}$ i $B = \{1, 3, 4\}$ wówczas $A \cap B = \{1\}$. Liczba 1 tu jest jedynym wspólnym elementem obu zbiorów

Działania na zbiorach

Różnica zbiorów

Różnicą zbiorów A i B nazywamy zbiór tych elementów, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B. $A \setminus B = \{x : x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$

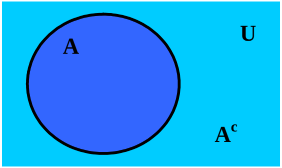


Przykład
Jeśli $A = \{1, 2, 5\}$ i $B = \{1, 3, 4\}$ wówczas $A \setminus B = \{2, 5\}$.

Działania na zbiorach

Dopełnienie

Dopełnieniem zbioru A z przestrzeni U nazywamy zbiór tych elementów przestrzeni U, które nie należą do zbioru A. Dopełnienie zbioru A oznaczamy jako A^C i zapisujemy jako. $A^C = \{x : x \in U \;\wedge\; x \notin A\}$. Z definicji dopełniania wynika także, że jest to po prostu różnica przestrzeni U i zbioru A tj. $A^C = U \backslash A$



Przykład
Jeśli $A = \{1, 2, 3\}$, a przestrzenią U jest zbiór wszystkich liczb całkowitych dodatnich, to dopełnieniem zbioru A będzie $A^C = \{4, 5, 6, 7, \ldots\}$.

Zbiory liczb rzeczywistych i jego podzbiory

- Zbiór liczb naturalnych: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...\}$
- Zbiór liczb całkowitich: $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$ i jako przykład jego podzbiór liczb całkowitych:
  - dodatnich $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$
  - ujemnych $\mathbb{Z}_- = \{..., -5, -4, -3, -2, -1\}$
- Zbiór liczb wymiernych
  $\mathbb{Q} = \{x : x = q/p,$ gdzie $p \in \mathbb{Z}$ i $q \in \mathbb{Z}$ i $q \neq 0\}$
- Zbiór liczb niewymiernych (IW) czyli takich liczb rzeczywistych których **nie można** zapisać w postaci ilorazu dwóch liczb całkowitych p/q

Zbiór liczb wymiernych

- Do zbioru liczb wymiernych należy każda liczba, którą można zapisać w postaci ułamka zwykłego p/q, gdzie $p, q \in \mathbb{Z}$ i $q \neq 0$.
- Liczby wymierne to również liczby
    - całkowite
    - ułamki zwykłe i dziesiętne skończone
    - ułamki dziesiętne nieskończone okresowe

Pomiędzy liczbami całkowitymi (w tym naturalnymi), a wymiernymi zachodzi więc następująca relacja: $N \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Zamiana ułamków zwykłych na ułamki dziesiętne

- $\frac{4}{5} = \frac{4*2}{5*2} = \frac{8}{10}$
- $\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0,75$
- $2 : 3 = 0,666... = 0,(6)$
- $7 : 11 = 0,636363... = 0,(63)$ okres dwucyfrowy

Zamiana ułamków dziesiętnych na ułamki zwykłe

- $2,6 = 2\frac{6}{10} = \frac{26}{10}$
- $0,375 = \frac{375}{1000} = \frac{3}{8}$
- ułamek okresowy zapisujemy jako $\frac{cyfry - z - okresu}{liczba : 9 - tek = liczbie - cyfr - w - okresie}$; $0,(14) = \frac{14}{99}$
- $1,2(18) = 1,2 + 0,0(18) = 1,2 + 0,1 * 0,(18) = 1\frac{2}{10} + 0,1 * \frac{18}{99} = \frac{12}{10} + \frac{1}{10} * \frac{2}{11}$

Liczby niewymierne

- Liczbą niewymierną nazywamy liczbę, której **nie można** zapisać w postaci ułamka zwykłego p/q, gdzie $p, q \in \mathbb{Z}$ i $q \neq 0$.
- Przykład: $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$, π
- Szacowanie liczb niewymiernych
  - $\sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{4} \Rightarrow 1 < \sqrt{2} < 2 \Rightarrow 1^2 < 2 < 2^2$
  - $1,4 < \sqrt{2} < 1,5 \Rightarrow 1,4^2 < 2 < 1,5^2 \Rightarrow 1,96 < \sqrt{2} < 2,25$
  - $1,41 < \sqrt{2} < 1,42 \Rightarrow 1,41^2 < 2 < 1,42^2 \Rightarrow 1,9881 < \sqrt{2} < 2,0164$
  - ...
- Konstrukcja geometryczna

Działania na liczbach rzeczywistych

- Prawo przemienności; $a, b, c \in \mathbb{R}$
  - $a + b = b + a$
  - $a \cdot b = b \cdot a$
- Prawo łączności
  - $(a + b) + c = a + (b + c)$
  - $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Prawo rozdzielności
  - $a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$
  - $(a \pm b) : c = a : c \pm b : c$

Potęga i pierwiastek o wykładniku całkowitym

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i $b \in R \setminus \{0\}$ oraz m i $n \in \mathbb{Z}$

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $a^m : a^n = a^{m-n}$
- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- $(a^n)^m = a^{m \cdot n}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Potęga i pierwiastek o wykładniku wymiernym

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i $b \in R_+ \cup \{0\}$ oraz m i $n \in N \setminus \{0, 1\}$

- $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ dla $b > 0$
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$
- $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ gdzie:$a > 0$ i $m \in \mathbb{Z}$ i $n \in N_+ \setminus \{1\}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$
- $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$
- $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$
- $\frac{k}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{k\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)} = \frac{k\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a-b}$

Przybliżenia liczbowe

- Liczby którymi posługujemy się w obliczeniach mogą być wartościami dokładnymi lub przybliżonymi.
- KAŻDĄ wartość przybliżoną podajemy z błędem przybliżenia.
- Wartości przybliżone mogą występować z nadmiarem lub niedomiarem.
- W metrologii definujemy.
  - błąd przybliżenia będący różnicą pomiędzy wartością zmierzoną x, a wartością dokładną x_0 tj. $\Delta x = x - x_0$.
  - błąd bezwzględny $|\Delta x| = |x - x_0|$.
  - błąd względny $\delta_x = \frac{|\Delta x|}{|x_0|}$(Procentowo: $\delta_x = \frac{|\Delta x|}{|x_0|} \cdot 100\%$).

Przybliżenia liczbowe - przykład

- Zakładamy, iż liczba $x_0 = 8,6283719$ jest wartością dokładną, natomiast $x = 8,63$ jest jej przybliżeniem z dokładnością do $0,01$.

$|\Delta x| = |8,6283719 - 8,63| = 0,0016281 \approx 0,002,$
$|\Delta x| \; / \; |x_0| \approx 0.0002 = 0,02\%$

- Jeżeli znamy tylko wartość przybliżoną z zadaną dokładnością wówczas błąd przybliżenia równy jest dokładności z jaką znamy przybliżoną wartość.

$|\Delta x| = 0,01/8,63 = \frac{1}{861} \approx 0,12\%,$