Zajęcia dokształcające z matematyki

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego "Poczuj chemię do chemii"

J.Stanek

Wydział Chemii UAM Poznań

Listopad 2009

Pojęcie funkcji

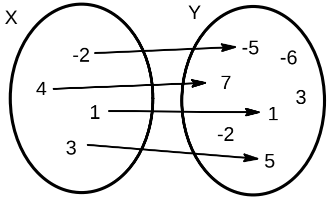
Definicja

Funkcją f określoną na zbiorze X o wartościach w zbiorze Y nazywamy takie odwzorowanie, które każdemu elementowi zbioru X przyporządkowuje dokładnie jeden element zbioru Y.

- Zbiór X nazywamy dziedziną funkcji, a elementy zbioru X nazywamy argumentami funkcji.
- Argument x funkcji nazywamy także zmienną niezależną.
- Zbiór Y nazywamy przeciwdziedziną funkcji.
- Każdy element y zbioru Y przyporządkowany danemu elementowi x ze zbioru argumentów nazywamy wartością funkcji dla tego argumentu.
- Zbiór wszystkich wartości przyjmowanych przez daną funkcję nazywamy zbiorem wartości tej funkcji.
- Zapis: $f : X \to Y$ (czytamy: f jest funkcją określoną na zbiorze X o wartościach w zbiorze Y).

Przedstawienia funkcji

- Za pomocą grafu;



Dziedzina funkcji: zbiór $X = \{-2, 1, 3, 4\}$; Przeciwdziedzina: zbiór $Y = \{-6, -5, -2, 1, 3, 5, 7\}$; Zbiór wartości: $W = \{-5, 1, 5, 7\}$; $W \subset Y$

- Za pomocą tabeli;
- Zbioru uporządkowanych par: $\{(-2, -5), (4, 7), ...\}$;
- Za pomocą wzoru $f : x \rightarrow 2x - 1$ lub $f(x) = 2x - 1$ lub $y = 2x - 1$;
- Za pomocą wykresu.

Dziedzina funkcji

Definicja

Dziedziną funkcji D nazywamy zbiór wszystkich argumentów x, dla których funkcja $y = f(x)$ jest określona (ma sens liczbowy).

Przykład

- Funkcja $f(x) = \dfrac{x}{(x^2-4)}$ ma sens liczbowy $\Leftrightarrow$ gdy $(x^2-4) \neq 0 \Rightarrow$ $x - 2 \neq 0 \wedge\ x + 2 \neq 0$. Stąd $D = \mathbb{R} \backslash \{-2, 2\}$.
- Funkcja $f(x) = \sqrt{2x-3}$ ma sens liczbowy $\Leftrightarrow$ gdy $2x - 3 \geq 0 \Rightarrow$ $x \geq 3/2$. Stąd $D = \{x : x = \mathbb{R} \wedge x \geq 3/2\}$ $(D = \langle 3/2; +\infty)$)

Miejsca zerowe funkcji

Definicja

Miejscem zerowym funkcji $f(x)$ nazywamy argument $x \in D$, dla którego funkcja ta przyjmuje wartość zero tj. $f(x) = 0$.

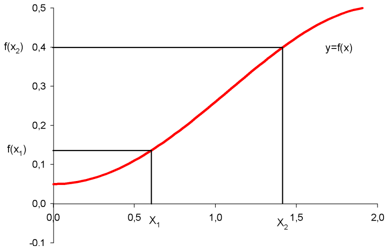
Przykład

- Funkcja $f(x) = -x^2 + 9$ przyjmuje wartości zerowe $\Leftrightarrow$ gdy $-(x^2 - 9) = 0 \ /(-1) \Rightarrow x - 3 = 0 \vee x + 3 = 0$. Stąd miejscami zerowymi są liczby $x = 3$ oraz $x = -3$.
- Funkcja $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-4}$ przyjmuje wartości zerowe $\Leftrightarrow$ gdy $x + 2 = 0$ $\Rightarrow x = -2$. Jednakże dziedziną funkcji jest $D = \mathbb{R} \backslash \{-2, 2\}$ gdyż żądamy aby mianownik tj. $(x^2 - 4) \neq 0$. Ostatecznie zatem funkcja ta **nie ma miejsc zerowych**.

Monotoniczność funkcji

Definicja

Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy monotonicznie rosnącą w zbiorze $A \subset X$ jeżeli dla dowolnych argumentów x_1 oraz x_2 z dziedziny funkcji A, gdzie $x_1 < x_2$ spełniony jest warunek $f(x_1) < f(x_2)$.



Notatcja $\bigwedge_{x_1, x_2 \in A} x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Monotoniczność funkcji

Funkcję $f : X \to Y$ określoną w zbiorze $A \subset X$ nazywamy funkcją

- rosnącą, gdy $\bigwedge\limits_{x_1, x_2 \in A} x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- malejącą, gdy $\bigwedge\limits_{x_1, x_2 \in A} x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- nierosnąca, gdy $\bigwedge\limits_{x_1, x_2 \in A} x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$
- niemalejącą, gdy $\bigwedge\limits_{x_1, x_2 \in A} x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$
- stałą, gdy $\bigvee\limits_{c \in Y} \bigwedge\limits_{x \in A} f(x) = c$

Monotoniczność funkcji

Aby określić monotoniczność funkcji: $f : X \to Y$

- Badamy znak różnicy $f(x_1) - f(x_2)$ przy założeniu, że $x_1 - x_2 > 0$, gdzie $x_1,\ x_2 \in A$ i $A \subset X$
- Korzystamy z różniczkowego kryterium badania monotoniczności funkcji w zbiorze A (tzw. wnioski z twierdzenia Lagrange'a):
  - jeśli $f\prime(x) = 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, to funkcja f jest stała w przedziale (a, b),
  - jeśli $f\prime(x) > 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, to funkcja f jest rosnąca w przedziale (a, b),
  - jeśli $f\prime(x) < 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, to funkcja f jest malejąca w przedziale (a, b).

Najmniejsza i największa wartość funkcji

Definicja

Funkcja $f : X \to Y$ przyjmuje wartość największą $y_0 = f(x_0)$ dla pewnego $x_0 \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in X$ zachodzi nierówność $f(x) \leqslant f(x_0)$.

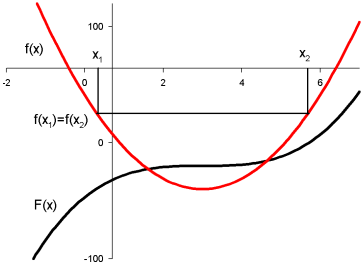
Definicja

Funkcja $f : X \to Y$ przyjmuje wartość najmniejszą $y_0 = f(x_0)$ dla pewnego $x_0 \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in X$ zachodzi nierówność $f(x) \geqslant f(x_0)$.

Różnowartościowość funkcji

Definicja

Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy funkcją różnowartościową, wtedy i tylko wtedy, gdy różnym argumentom możemy przyporządkować różne wartości tj. $\bigwedge_{x_1, x_2 \in X \ \wedge \ x_1 \neq x_2} f(x_1) \neq f(x_2)$

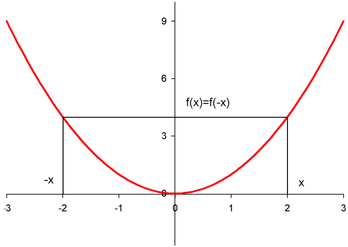


$F(x)$ - funkcja różnowartściowa; $f(x)$ - funkcja, która nie jest różnowartościowa

Funkcje parzyste

Definicja

Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy parzystą, jeśli dla przeciwnych argumentów przyjmuje takie same wartości tzn.: $\bigwedge_{x \in X} -x \in X \wedge f(-x) = f(x)$



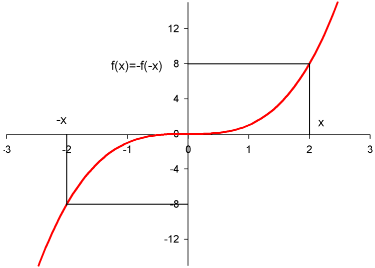
Przykład:

Dla funkcji $f(x) = x^2$ mamy: $\left.\begin{array}{r} f(-2) = (-2)^2 = 4 \\ f(2) = 2^2 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow f(-2) = f(2).$

Funkcje nieparzyste

Definicja

Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy parzystą, jeśli dla przeciwnych argumentów przyjmuje przeciwne wartości tzn.: $\bigwedge_{x \in X} -x \in X \wedge f(-x) = -f(x)$



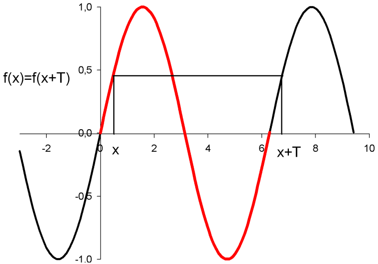
Przykład:

Dla $f(x) = x^3$ mamy: $\left.\begin{array}{c} f(-2) = (-2)^3 = -8 \\ f(2) = 2^3 = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow f(-2) = -f(2).$

Funkcje okresowe

Definicja

Funkcję $f(x)$ nazywamy funkcją okresową wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba $T \neq 0$, że dla każdego $x \in X$, $x + T \in X$ i zachodzi równość $f(x + T) = f(x)$.



Przykład:

Dla $f(x) = \sin(x)$ mamy $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ tzn. $T = 2\pi$

Funkcja złożona

Definicja

Jeżeli $f : D_f \longrightarrow Y$ oraz $g : D_g \longrightarrow Z$, gdzie $Y \subset D_g$ wówczas złożeniem funkcji f i g nazywamy taką funkcję $h : D_f \longrightarrow Z$, że $h(x) = g(f(x))$ dla każdego x spełniającego warunki $x \in D_f$ oraz $f(x) \in D_g$.

Złożenie funkcji oznaczamy symbolicznie $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Funkcja f jest tutaj funkcją wewnętrzną, funkcja g z kolei funkcją zewnętrzną.

Przykład

Dane są dwie funkcje $f(x) = 7x^2$ oraz $g(x) = \frac{1}{2}x - 4$.

- $g(f(x)) = g(7x^2) = \frac{1}{2}\left(7x^2\right) - 4$
- $f(g(x)) = f\left(\frac{1}{2}x - 4\right) = 7 \cdot \left(\frac{1}{2}x - 4\right)^2$

Funkcja odwrotna

Definicja

Jeżeli funkcja $f : X \to Y$ jest różnowartościowa to funkcję $g : Y \to X$ nazywamy funkcją odwrotną do funkcji f jeżeli $\bigwedge_{x \in X} (g \circ f)(x) = x$ oraz $\bigwedge_{y \in Y} (f \circ g)(y) = y$

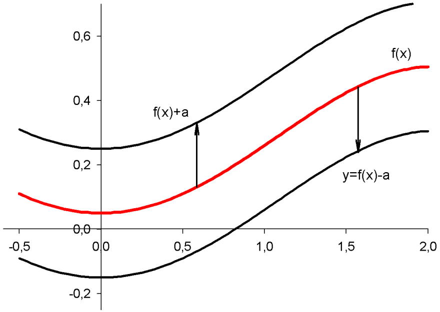
Przykład:

$y = \frac{3x}{2-x} \Rightarrow x = \frac{2y}{3+y} \Rightarrow$

- $f(g(y)) = f(\frac{3x}{2-x}) = f\left(\frac{3 \cdot \frac{2y}{3+y}}{2 - \frac{2y}{3+y}}\right) = y,$
- $g(f(x)) = g\left(\frac{2y}{3+y}\right) = g\left(\frac{2 \cdot \frac{3x}{2-x}}{3 + \frac{3x}{2-x}}\right) = x.$

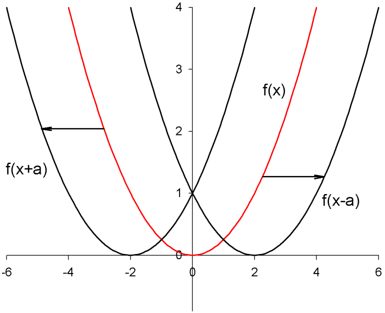
Przesuwanie wykresu funkcji wzdłuż osi OY

Przesuwając wykres funkcji $y = f(x)$ o odcinek o długości a w górę otrzymujemy wykres funkcji $y = f(x) + a$. Przesuwając w dół otrzymujemy wykres o równaniu $y = f(x) - a$.



Przesuwanie wykresu funkcji wzdłuż osi OX

Wykresem funkcji $y = f(x)$ przesuniętym o odcinek o długości a w prawo jest wykres o równaniu $y = f(x - a)$. Wykresem funkcji $y = f(x)$ przesuniętym o odcinek o długości a w lewo jest wykres o równaniu $y = f(x + a)$.



Symetria względem osi OX, OY oraz początku układu współrzędnych

- Symetrię względem osi OX otrzymujemy przekształcając wykres funkcji $y = f(x)$ zgodnie z równaniem $y = -f(x)$.
- Symetrię względem osi OY otrzymujemy przekształcając wykres funkcji $y = f(x)$ zgodnie z równaniem $y = f(-x)$.
- Symetrię względem początku układu współrzędnych otrzymujemy przekształcając wykres funkcji $y = f(x)$ zgodnie z równaniem $y = -f(-x)$.