Zajęcia dokształcające z matematyki

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego "Poczuj chemię do chemii"

J.Stanek

Wydział Chemii UAM Poznań

Listopad 2009

Funkcja kwadratowa - definicje

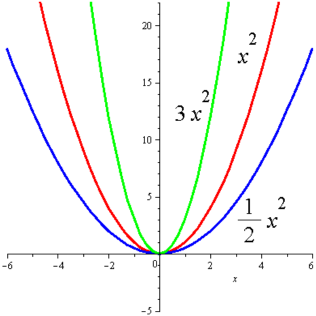
Definicja

Funkcją kwadratową nazywamy funkcję określoną wzorem
$f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie x, a, b, $c \in \mathbb{R}$, przy czym $a \neq 0$.

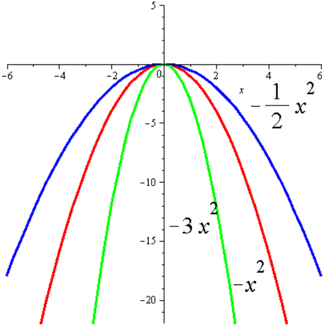
Definicja

Wyrażenie $ax^2 + bx + c$ nazywamy trójmianem kwadratowym.

Funkcja f(x)=ax^2 i jej wykres



Wykres funkcji $f(x) = ax^2$ dla $a > 0$



Wykres funkcji $f(x) = ax^2$ dla $a < 0$

Postać kanoniczna funkcji kwadratowej

Twierdzenie

Wyrażenie $a\left(x-p\right)^2+q$ nazywamy postacią kanoniczną trójmianu kwadratowego tj. funkcji $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$, gdzie $a\neq 0$.

Aby przedstawić funkcję $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$ w postaci kanonicznej należy:

1. Znaleźć takie p i q, dla których zachodzi równość: $a\left(x-p\right)^2+q=ax^2+bx+c$
2. Porównując odpowiednie współczynniki stojące przy x oraz wyrazy wolne otrzymujemy: $p=-\frac{b}{2a}$, $\quad q=-\frac{b^2-4ac}{4a}$
3. Definiując wyrażenie $\Delta=b^2-4ac$ (znane jako wyróżnik trójmianu kwadratowego) otrzymujemy:

$$p=-\frac{b}{2a}\quad q=-\frac{\Delta}{4a},\quad f\left(x\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$$

Postać kanoniczna funkcji kwadratowej i jej wykres

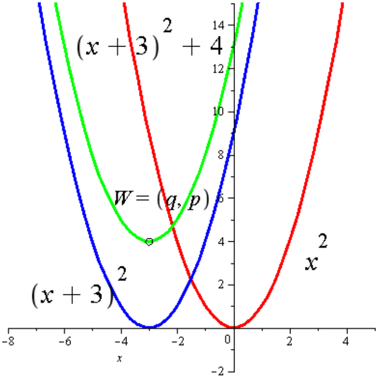
Aby sporządzić wykres funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej tj. $f(x) = a(x-p)^2 + q$ należy

- Sporządzić wykres funkcji $f(x) = ax^2$.
- Przesunąć o p jednostek w prawo (w lewo) dla $p > 0$ ($p < 0$).
- Przesunąć następnie wykres o q jednostek do góry (do dołu) jeśli $q > 0$ ($q < 0$).

Postać kanoniczna funkcji kwadratowej i jej wykres

Przykład

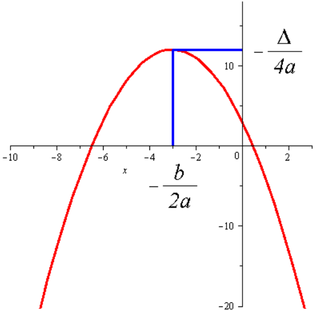
$f(x) = x^2 + 6x + 13 = (x+3)^2 + 4$

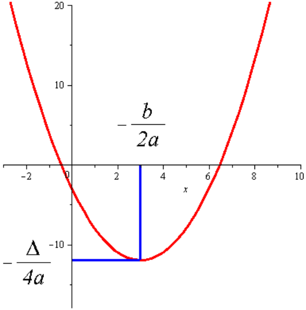


Wykresem funkcji $f(x) = a(x-p)^2 + q$ jest parabola o wierzchołku w punkcie $W = (q, p)$ przystająca do paraboli będącej wykresem funkcji $f(x) = ax^2$.
W naszym przypadku: $f(x) = (x+3)^2 + 4,\ W = (-3, 4)$.

Największa i najmniejsza wartość funkcji kwadratowej

Gdy $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$





dla $a < 0$ największą wartością funkcji jest $y = -\frac{\Delta}{4a}$.

dla $a > 0$ najmniejszą wartością funkcji jest $y = -\frac{\Delta}{4a}$.

Monotoniczność funkcji kwadratowej

Z własności funkcji kwadratowej wynika, że

- Jeśli $a > 0$, to dla $x \in \left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ funkcja jest malejąca, natomiast w przedziale $\left(-\frac{b}{2a}; \infty\right)$ funkcja jest rosnąca. W punkcie $x = -\frac{b}{2a}$ funkcja osiąga zatem wartość najmniejszą.
- eśli $a < 0$, to dla $x \in \left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ funkcja jest rosnąca, natomiast w przedziale $\left(-\frac{b}{2a}; \infty\right)$ funkcja jest malejąca. W punkcie $x = -\frac{b}{2a}$ funkcja osiąga tym samym wartość największą.

Postać iloczynowa funkcji kwadratowej

- Trójmian $f(x) = ax^2 + bx + c$ zapisujemy w postaci kanonicznej $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$.
- Wyłączamy współczynnik a przed nawias $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$.
- Wyrażenie $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ rozkładamy na czynniki liniowe według wzoru skróconego mnożenia: $\left(a^2 - b^2\right) = (a+b)(a-b)$ otrzymując$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = \left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$.
- Wprowadzając oznaczenia $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = x_1$ oraz $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = x_2$ otrzymujemy

$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$ o ile $\Delta > 0$.

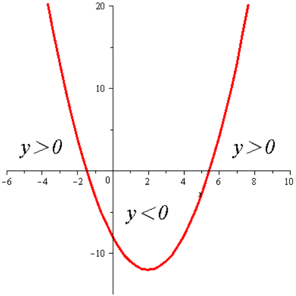
Miejsca zerowe funkcji kwadratowej

Miejscem zerowym funkcji f nazywamy taki argument x, dla którego wartość funkcji f równa się zeru.

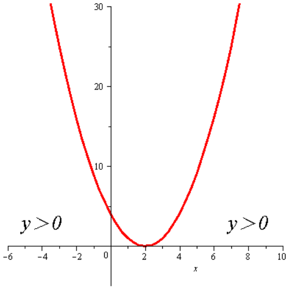
- Jeżeli $\Delta > 0$, $\left(\Delta = b^2 - 4ac\right)$ to funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ ma dwa miejsca zerowe:
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ oraz } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$
- Jeżeli $\Delta = 0$, to funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ ma jedno miejsce zerowe:
$$x = -\frac{b}{2a}$$
- Jeżeli $\Delta < 0$, to funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ nie ma miejsc zerowych.

Znak funkcji kwadratowej

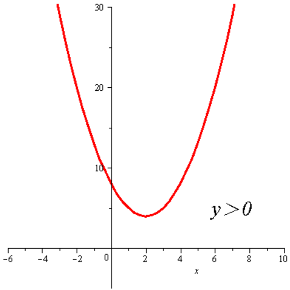
- $a > 0$



$\Delta > 0$



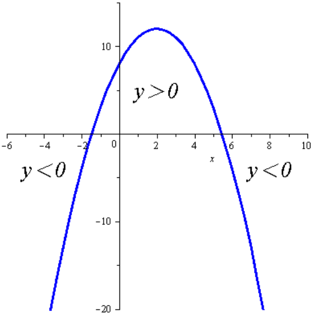
$\Delta = 0$



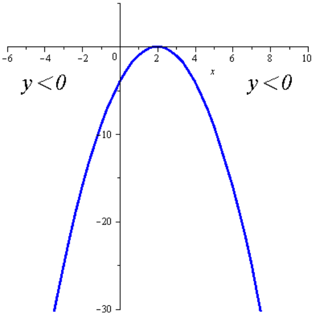
$\Delta < 0$

Znak funkcji kwadratowej

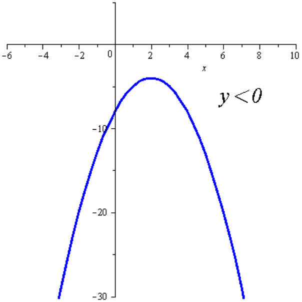
- $a < 0$



$\Delta > 0$



$\Delta = 0$



$\Delta < 0$

Nierówności z funkcją kwadratową

Definicja

Nierównością kwadratową nazywamy nierówność postaci $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leqslant 0$, gdzie $a \neq 0$.

Definicja

Rozwiązaniem nierówności nazywamy każdą liczbę, która spełnia tę nierówność.

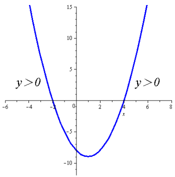
Metody rozwiązywania:

- Graficzna
- Algebraiczna

Nierówności z funkcją kwadratową

Przykład:
Rozwiąż nierówność: $x^2 - 2x - 8 > 0$
$x^2 - 2x - 8 = (x+2)(x-4) \Rightarrow x_1 = -2, \quad x_2 = 4$

- Metoda graficzna:



Z wykresu odczytujemy, że funkcja $f(x) = x^2 - 2x - 8$ przyjmuje wartości dodatne $\Leftrightarrow$ $x \in (-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$.

- Metoda algebraiczna:

Korzystamy z własności, że $a \cdot b > 0 \Leftrightarrow (a > 0 \wedge b > 0)$ lub $(a < 0 \wedge b < 0)$.

$x^2 - 2x - 8 > 0 \equiv \begin{cases} x+2 > 0 \\ x-4 > 0 \end{cases}$

lub $\begin{cases} x+2 < 0 \\ x-4 < 0 \end{cases}$.

Rozwiązanie: $(x > -2 \wedge x > 4)$ lub $(x < -2 \wedge x < 4) \equiv x \in (-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$

Układy równań

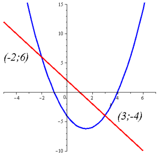
Poszukujemy rozwiązania układu równań o dwóch niewiadomych, z których przynajmniej jedno równanie jest drugiego stopnia.

Przykład: Rozwiąż układ równań: $\begin{cases} y = x^2 - 3x - 4 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$

- Metoda algebraiczna (przez podstawienie)

Przyrównując obie strony równania otrzymujemy:
$x^2 - 3x - 4 = -2x + 2 \equiv$
$(x+2)(x-3) \Rightarrow$
$x_1 = -2, \quad x_2 = 3 \Rightarrow$
$y_1 = -2x_1 + 2 = 6 \quad y_2 =$
$-2x_2 + 2 = -4$
$(x, y) = (-2, 6)$ lub $(3, -4)$

- Metoda graficzna:



Rozwiązaniem są punkty przecięcia się paraboli $y = x^2 - 3x - 4$ oraz prostej $y = -2x + 2$

Funkcja kwadratowa z wartością bezwzględną

Przykład:

Przedstaw wykres funkcji $f(x) = x^2 - |4x - 4|$

Rozpatrujemy dwa przypadki: $|4x-4| = \begin{cases} 4x - 4 & \text{dla } x \geqslant 1 \\ -(4x-4) & \text{dla } x < 1 \end{cases}$

1. dla $x \in (-\infty; 1)$; $|4x - 4| = -(4x - 4) \Rightarrow f(x) = x^2 + 4x - 4 = (x + 2)(x + 8)$
2. dla $x \in \langle 1; +\infty)$; $|4x - 4| = 4x - 4 \Rightarrow f(x) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)(x - 2)$