Zajęcia dokształcające z matematyki

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego "Poczuj chemię do chemii"

J.Stanek

Wydział Chemii UAM Poznań

Grudzień 2009

Wielomiany - treści podstawowe

Definicja

Wielomianem stopnia n zmiennej rzeczywistej x nazywamy wyrażenie postaci

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

przy czym a_n, a_{n-1},...,a_1,$a_0 \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ i $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

- Liczby a_n, a_{n-1},...,a_1, a_0 nazywamy współczynnikami wielomianu (liczbę a_0 nazywamy też wyrazem wolnym)
- Stopniem wielomianu nazywamy największy wykładnik potęgi zmiennej, dla której współczynnik jest różny od zera
- Wielomian $W(x)$, dla którego prawdziwy jest zwiazek: $W(x) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, nazywamy wielomianem zerowym. Dodatkowo przyjmiemy, ze stopień wielomianu zerowego to $-\infty$
- $W(x) = a_0$ - wielomian stopnia zero dla $a_0 \neq 0$

Równość wielomianów

Definicja

Dwa wielomiany jednej zmiennej $W(x)$ i $P(x)$ sa równe wtedy i tylko wtedy, gdy $W(x) = P(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Dwa wielomiany sa równe wtedy i tylko wtedy, gdy są albo zerowe albo są tego samego stopnia i maja równe współczynniki przy odpowiednich potegach zmiennej x.

Pierwiastek wielomianu

Definicja

Liczbę rzeczywistą p nazywamy pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $W(p) = 0$.

Pierwiastek wielomianu $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0$ jest zatem rozwiazaniem równania
$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2} + ... + a_1 p + a_0 = 0$.

Definicja

Liczba $p \in \mathbb{R}$ jest pierwiastkiem k-krotnym wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $W(x)$ dzieli sie bez reszty przez $(x - p)^k$, a przy dzieleniu przez $(x - p)^{k+1}$ reszta jest różna od zera.

Liczbę $k \in \mathbb{N}$ nazywamy krotnością pierwiastka.

Dodawanie i odejmowanie wielomianów

Definicja

Sumą wielomianów $W(x)$ i $P(x)$ nazywamy wielomian $Q(x)$ utworzony z wyrazów obu wielomianów przez dodanie ich wyrazów podobnych.

Definicja

Różnicą wielomianów $W(x)$ i $P(x)$ nazywamy taki wielomian $Q(x)$, że $Q(x) + P(x) = W(x)$.

Mnożenie wielomianów

Definicja

Iloczynem wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)$ nazywamy wielomian $Q(x)$, który jest sumą wszystkich iloczynów wyrazów wielomianu $W(x)$ przez wyrazy wielomianu $P(x)$.

Dzielenie wielomianów

Definicja

Niech $W(x)$ i $V(x)$ będą wielomianami o współczynnikach rzeczywistych i niech wielomian $V(x)$ będzie różny od wielomianu zerowego. Istnieje wówczas dokładnie jedna para wielomianów $Q(x)$ oraz $R(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, taka że spełniony jest warunek

$$W(x) = V(x) \cdot Q(x) + R(x),$$

przy czym stopień wielomianu $R(x)$ jest mniejszy od stopnia wielomianu $V(x)$.

Wielomian $V(x)$ nazywamy dzielnikiem wielomianu $W(x)$.

Dzielenie wielomianów - przykład

Oblicz iloraz i resztę z dzielenia wielomianu $2x^3 + 4x + 1$ przez $2x + 2$.

$$
\begin{array}{rrrrl}
x^2 & -x & +3 & & \\
\hline
(2x^3 & & +4x & +1) & : (2x+2) \\
-2x^3 & -2x^2 & & & \\
\hline
 & -2x^2 & +4x & +1 & \\
 & 2x^2 & +2x & & \\
\hline
 & & 6x & +1 & \\
 & & -6x & -6 & \\
\hline
 & & & -5 &
\end{array}
$$

Odp: iloraz jest równy $x^2 - x + 3$, a reszta wynosi -5.

Twierdzenie Bézouta

Twierdzenie

Liczba rzeczywista p jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $W(x)$ dzieli się bez reszty przez dwumian $x - p$.

Przykład: Dla jakiej wartości parametru a wielomian $W(x) = 3x^4 - 12x^2 - 6x + a$ dzieli się bez reszty przez $x - 2$?

Odp: Z twierdzenia Bézouta wynika, że liczba 2 musi być pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, tj. $W(2) = 0$. Ponieważ $W(2) = 3{\cdot}24 - 12{\cdot}22 - 6{\cdot}2 + a = 0 \Rightarrow -12 + a = 0$. Stąd rozwiązaniem jest liczba $a = 12$.

Pierwiastki całkowite wielomianu

Twierdzenie

Niech $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Jeżeli $p \in \mathbb{Z}$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, wówczas p jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0 tj. $a_0/p \in \mathbb{Z}$.

Przykład: Znajdź pierwiastki wielomianu:
$2x^5 - 6x^4 + 4x^3 - 19x^2 + 22x - 3$.

Odp: Dzielnikami wyrazu wolnego tj. $a_0 = -3$ są liczby: $\pm 1, \pm 3$. Pierwiastków całkowitych będziemy zatem poszukiwać wśród dzielników liczby -3.

Wynik:
$(2x^5 - 6x^4 + 4x^3 - 19x^2 + 22x - 3) : (x - 3) = 2x^4 + 4x^2 - 7x + 1$.

Pierwiastki wymierne wielomianu

Twierdzenie

Niech $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Jeżeli wielomian $W(x)$ ma pierwiastek rzeczywisty, który można zapisać w postaci ułamka nieskracalnego p/q, wówczas p jest dzielnikiem wyrazu a_0, natomiast q dzielnikiem wyrazu a_n.

Przykład: Znajdź pierwiastki wielomianu: $4x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 2x + 2$.

Odp: Dzielnikami wyrazu wolnego tj. $a_0 = 2$ są liczby: $\pm 1, \pm 2$, natomiast dzielnikami $a_4 = 4$ są liczby: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ Pierwiastków wymiernych będziemy zatem poszukiwać wśród liczb: $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}$(pierwiastków całkowitych wśród dzielników liczby 2 tj. $\pm 1, \pm 2$)

Wynik: $(4x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 2x + 2) : (x - 1/2) = 4x^3 + 4x^2 - 4x - 4$.

Rozkład wielomianu na czynniki

Twierdzenie

Każdy wielomian $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych stopnia $n \in N$ można rozłożyć na czynniki co najwyżej stopnia drugiego o współczynikach rzeczywistych.

Przy rozkładzie wielomianu na czynniki korzystamy z:

- postaci iloczynowej trójmianu kwadratowego
- wzorów skróconego mnożenia
- wyłączania wspólnego czynnika poza nawias
- grupowania wyrazów
- twierdzenia Bézouta

Dzielenie wielomianów - schemat Hornera

Wielomian $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ zapisujemy w następujący sposób:

1. $(a_3x^2 + a_2x + a_1)x + a_0 = 0$
2. $((a_3x + a_2)x + a_1)x + a_0 = 0$
3. $(((a_3)x + a_2)x + a_1)x + a_0 = 0$

Jeżeli wielomian jest podzielny przez dwumian $x - p$ wówczas p jest pierwiastkiem tego wielomianu (z twierdzenia Bézouta) tzn. spełnione jest równanie:$(((a_3)p + a_2)\,p + a_1)\,p + a_0 = 0$. Ostatnie równanie jest szczególnie wygodne w działaniach algebraicznych (mnożenie,dodawanie).

Schematycznie, dzielenie $(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) : (x - p)$ możemy zapisać w formie tabeli jako:

	a_3	a_2	a_1	a_0
p	a_3	$a_3p + a_2$	$(a_3p + a_2)\,p + a_1$	$((a_3p + a_2)\,p + a_1)\,p + a_0$

Schemat Hornera - przykład

$\left(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0\right) : (x - p)$

	a_3	a_2	a_1	a_0
p	a_3	$a_3p + a_2$	$\left(a_3p + a_2\right)p + a_1$	$\left(\left(a_3p + a_2\right)p + a_1\right)p + a_0$

Gdy p jest pierwiastkiem wielomianu $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, wówczas pole pod wyrazem wolnym a_0 równe jest 0.

Przykład:
Oblicz $\left(2x^3 - 5x^2 - 7x + 12\right) : (x - 3) = 2x^2 + x - 4$.

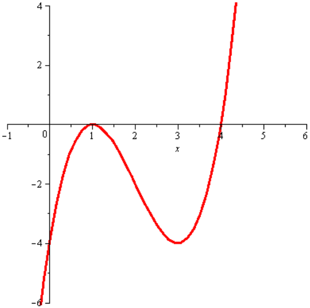
	2	-5	-7	12
3	2	$2 \cdot 3 - 5 = 1$	$1 \cdot 3 - 7 = -4$	$-4 \cdot 3 + 12 = 0$

Wykresy funkcji wielomianowych

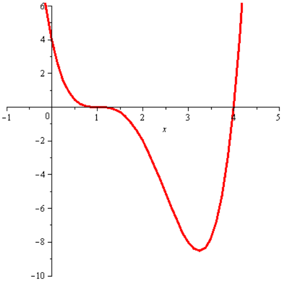
Aby narysować szkic funkcji wielomianowej $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ należy:

- na osi X zaznaczyć wszystkie miejsca zerowe
- dla $a_n > 0$ rozpocząć szkic od prawej strony od dodatnich wartości y tak by przechodził przez wszystkie kolejne miejsca zerowe
- dla $a_n < 0$ rozpocząć szkic od prawej strony lecz od ujemnych wartości y tak by przechodził przez wszystkie kolejne miejsca zerowe
- jeśli miejsce zerowe x_0 jest pierwiastkiem k-krotnym, wówczas szkic wykresu
  - dla k parzystego jest styczny do osi X w punkcie x_0
  - dla k nieparzystego przecina oś X w punkcie x_0

Wykresy funkcji wielomianowych



Wykres funkcji
$f(x) = (x-1)^2(x-4)$



Wykres funkcji
$f(x) = (x-1)^3(x-4)$

Nierówności wielomianowe

Aby rozwiązać nierówność wielomianową, należy:

- znaleźć pierwiastki danego wielomianu tj.rozłożyc go na czynniki
- zbadać znak poszczególnych czynników w każdym z przedziałów
- określić znak iloczynu wszystkich czynników (pomocnym może okazać się tzw. siatka znaków)

Nierówności wielomianowe

Przykład. Rozwiąż nierówność: $x^3 + x^2 - 4x - 4 < 0$

$$x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x+1)(x-2)(x+2) \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -2$$

x	$(-\infty; -2)$	$(-2; -1)$	$(-1; 2)$	$(2; \infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$W(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$