Zajęcia dokształcające z matematyki

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego "Poczuj chemię do chemii"

J.Stanek

Wydział Chemii UAM Poznań

Grudzień 2009

Funkcja wymierna

Definicja

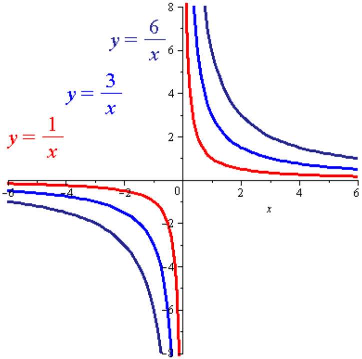
Niech $G(x)$ i $H(x)$ oznaczają wielomiany jednej zmiennej, a P niech oznacza zbiór pierwiastków wielomianu $H(x)$. Funkcję

$$f(x) = \frac{G(x)}{H(x)},$$

określoną na zbiorze $D = \mathbb{R} \backslash \{P\}$ nazywamy **funkcją wymierną** jednej zmiennej.

Funkcja typu f(x)=a/x i jej wykres

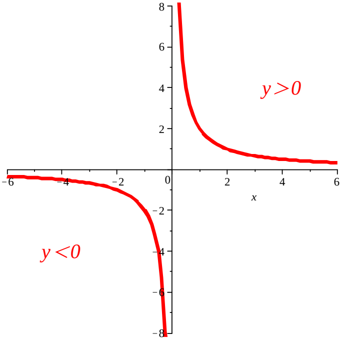
- dziedzina: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$
- zbiór wartości: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$
- miejsca zerowe: brak
- minimum, maksimum: brak
- obie osie są asymptotami wykresu funkcji
- wykresem funkcji jest krzywa zwana **hiperbolą**



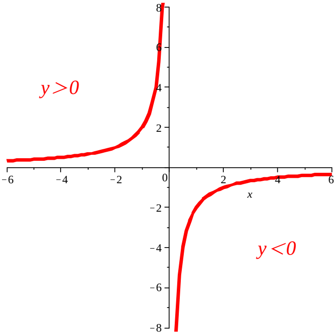
Wykresy funkcji: $f(x) = 1/x$, $f(x) = 3/x$ oraz $f(x) = 6/x$.

Wartości dodatnie i ujemne, monotoniczność hiperboli

Dla $a > 0$ funkcja $f(x)$ jest przedziałami malejąca, dla $a < 0$ funkcja $f(x)$ jest przedziałami rosnąca



Wykres funkcji $f(x) = \dfrac{2}{x}$.

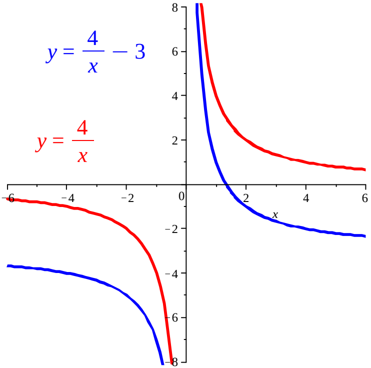


Wykres funkcji $f(x) = -\dfrac{2}{x}$.

Hiperbola typu f(x)=a/x+q i jej wykres

Własności funkcji

- dziedzina: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$
- zbiór wartości: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$
- miejsce zerowe: $-\frac{a}{q}$
- prosta $x = 0$ jest asymptotą piononą wykresu funkcji
- prosta $y = q$ jest asymptotą poziomą wykresu funkcji

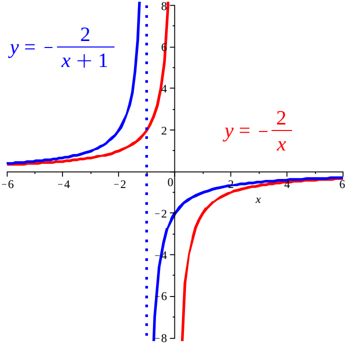


Wykres funkcji $f(x) = \frac{4}{x} - 3$

Hiperbola typu f(x)=a/(x-p) i jej wykres

Własności funkcji

- dziedzina: $\mathbb{R}\setminus\{p\}$
- zbiór wartości: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$
- miejsce zerowe: brak
- prosta $x = p$ jest asymptotą pionową wykresu funkcji
- prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą wykresu funkcji

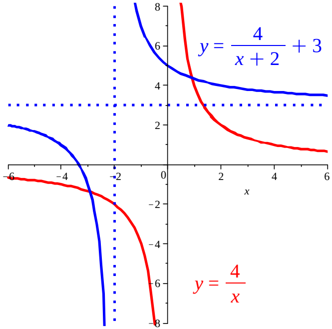


Wykres funkcji $f(x) = -\dfrac{2}{x+1}$

Hiperbola typu f(x)=a/(x-p)+q i jej wykres

Własności funkcji

- dziedzina: $\mathbb{R}\setminus\{p\}$
- zbiór wartości: $\mathbb{R}\setminus\{-q\}$
- miejsce zerowe: $-a/q+p$
- prosta $x=p$ jest asymptotą pionową wykresu funkcji
- prosta $y=q$ jest asymptotą poziomą wykresu funkcji



Wykres funkcji $f(x) = \dfrac{4}{x+2} + 3$

Funkcja homograficzna

Definicja

Funkcję $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, gdzie $c \neq 0$ i $ad - bc \neq 0$, nazywamy funkcją **homograficzną**.

Własności funkcji homograficznej

- Dziedziną jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{-d/c\}$
- Zbiorem wartości jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{a/c\}$
- Dla $ad < bc$ funkcja homograficzna jest przedziałami malejąca, dla $ad > bc$ funkcja homograficzna jest przedziałami rosnąca
- Prosta o równaniu $x = -d/c$ jest asymptotą pionową wykresu funkcji
- Prosta o równaniu $y = a/c$ jest asymptotą poziomą wykresu funkcji

Rozkład funkcji homograficznej

Funkcję $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, gdzie $c \neq 0$ i $ad - bc \neq 0$, możemy przekształcić w następujący sposób

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{x + \dfrac{d}{c}} + \frac{a}{c}$$

Wykresem funkcji $f(x)$ jest hiperbola $f(x) = \dfrac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x}$ przesunięta

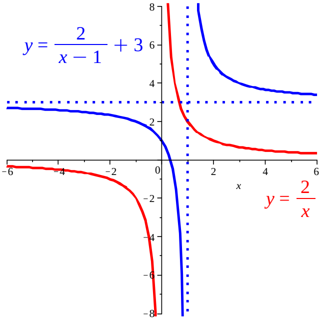
- wzdłuż osi X o $-\dfrac{d}{c}$ jednostek
- oraz wzdłuż osi Y o $\dfrac{a}{c}$ jednostek

Funkcja homograficzna - przykład

Przykład: Sporządź wykres i omów własności funkcji $f(x) = \dfrac{3x-1}{x-1}$

$$f(x) = \frac{3x-1}{x-1} = \frac{3(x-1)+2}{x-1} = \frac{2}{x-1} + 3$$

- Dziedziną jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
- Zbiorem wartości jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{3\}$
- Prosta o równaniu $x = 1$ jest asymptotą pionową wykresu funkcji
- Prosta o równaniu $y = 3$ jest asymptotą poziomą wykresu funkcji
- $(-\infty; 1)$, $(1; \infty)$ - funkcja malejąca
- $x = \dfrac{1}{3}$ - miejsce zerowe funkcji



Równania typu (ax+b)/(cx+d)=k

Przy rozwiązywaniu równań typu $\dfrac{ax+b}{cx+d} = k$ korzystamy z własności

$$\frac{a}{b} = c \Leftrightarrow \text{ gdy } a = b \cdot c \ \wedge \ b \neq 0$$

Przykład

Rozwiąż równanie: $\dfrac{3x-1}{2-3x} = -2$

Odp: $D = \mathbb{R} \setminus \{2/3\}$;

$$\frac{3x-1}{2-3x} = -2 \Leftrightarrow 3x-1 = -2(2-3x) \Leftrightarrow x = 1.$$

Nierówności typu $\dfrac{ax+b}{cx+d} \geqslant k$ lub $\dfrac{ax+b}{cx+d} \leqslant k$

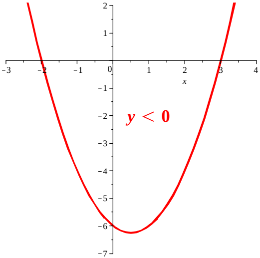
Przy rozwiązywaniu nierówności typu $\dfrac{ax+b}{cx+d} \geqslant k$ lub $\dfrac{ax+b}{cx+d} \leqslant k$ korzystamy z własności

1. $\dfrac{a}{b} > 0 \Leftrightarrow$ gdy $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases}$
2. $\dfrac{a}{b} > 0 \Leftrightarrow$ gdy $a \cdot b > 0$
3. $\dfrac{a}{b} < 0 \Leftrightarrow$ gdy $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$
4. $\dfrac{a}{b} < 0 \Leftrightarrow$ gdy $a \cdot b < 0$

Nierówności wymierne - przykład

Rozwiąż nierówność: $\dfrac{x-3}{x+2} \leqslant 0$

Odp: $\dfrac{x-3}{x+2} \leqslant 0 \Leftrightarrow$ gdy $(x-3)(x+2) \leqslant 0$



Z wykresu funkcji wynika, że $y \leqslant 0 \Leftrightarrow$ gdy $x \in \langle -2; 3\rangle$. Ponieważ $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ rozwiązaniem są $x \in (-2; 3\rangle$